

# Аддитивная комбинаторика. Основной

5 июля

1. Рассмотрим два ненулевых множества  $A_0, B$  в абелевой аддитивной группе  $(G, +)$ . Пусть  $A \subset A_0$  непустое множество, для которого отношение  $|A + B|/|A|$  минимально:

1.  $|A + B| = K \cdot |A|$ ;
2.  $|Z + B| \geq K \cdot |Z|, Z \subset A_0$ .

(а) Для любого  $x \in G$  докажите, что  $|A + B + x| \leq K \cdot |A + x|$ .

(б) Для любого непустого множества  $C$  и любого  $x \in G$  пусть  $Z = \{a \in A \mid a + B + x \subset A + B + C\}$ . Докажите, что  $|A + C| + |A| - |Z| \leq |A + (C \cup \{x\})|$ .

(в) **Лемма Петридиса.** Докажите, что для любого непустого множества  $C$  имеет место неравенство  $|A + B + C| \leq K \cdot |A + C|$ .

2. **Неравенство Плюннеке.** Докажите, что если  $|A + A| = K \cdot |A|$ , то  $|n \cdot A| \leq K^n \cdot |A|$ , где  $n \cdot A = A + A + \dots + A$ .

3. **Неравенство треугольника Русы.** Пусть  $X, Y, Z$  — подмножества абелевой группы  $(G, +)$ . Докажите неравенство  $|X - Y| \cdot |X - Z| \geq |X| \cdot |Y - Z|$ .

Пусть  $A, B \subset (G, +)$  — конечные подмножества. Элемент  $c \in A + B$  будем называть *уникальнопредставимым*, если он представим в виде  $c = a + b, a \in A, b \in B$  единственным образом (то есть  $c = a_0 + b_0, a_0 \in A, b_0 \in B$ , и если  $c = a + b, a \in A, b \in B$ , то  $a = a_0, b = b_0$ ).

4. Докажите, что если уникальнопредставимый элемент существует, то  $|A| + |B| \leq |G| + 1$ .

5. Пусть  $c_0 = a_0 + b_0$  — уникальнопредставимый элемент. Для  $a \in A$  обозначим  $J_a := \{b \in B \setminus \{b_0\} \mid a + b \notin A\}$ .

(а) Докажите, что существует такой  $a \in A \setminus \{a_0\}$ , что  $J_a \neq \emptyset$ .

(б) Пусть  $a$  из предыдущего пункта,  $B' = B \setminus J_a, A' = A \cup (J_a + a)$ . Докажите, что  $|A'| + |B'| = |A| + |B|$ .

(в) Докажите, что  $|A' + B'| = |A + B|$ .

(г) **Теорема Кемпермана – Шерка.** Докажите, что если существует уникальнопредставимый элемент, то  $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$ .